ГРЕШКЕ МЕРЕЊА ФИЗИЧКИХ ВЕЛИЧИНА

У основи природних наука, па и физике, леже мерења. Резултат мерења се изражава
- бројном вредношћу, која показује колико је пута мерена величина већа или мања од изабране јединице мере и
- изабраном јединицом мере дате физичке величине.

Мерење бројних вредности физичких величина је неизбежно везано за многброје грешаке. У наставку ћемо размотрити те грешке, као и методе обраде резултата мерења. Њихово познавање је неопходно да би из свеукупности мерења могли одредити резултат најближи стварној вредности, као и приметити пропусте и грешке. У складу са тим се могу организовати мерења, односно кориговати методе и поступци мерења да би грешка била што мања и правилно процењена.

Мерења и грешке мерења

Сваки резултат мерења физичких величина може бити познат само са одређеном сигурношћу. Неизвесност вредности физичке величине изражава се помоћу грешака. Грешке мерења није могуће егзактно одредити, оне се увек процењују. Методе процене грешака се разликују код директних и индиректних мерења.

Директна мерења су мерења која се врше помоћу мерних инструмената који мере управо тражену величину. Код њих се резултат добија једним очитавањем на скали мерног инструмента. На пример, директно се маса мери теразијама, време штоперицом, дужина метром, запремина мензуром и сл.

Индиректна мерења су мерења код којих се резултат добија из више директних мерења. При томе се резултат добија израчунавањима помоћу формула које повезују тражену величину са директно мереним величинама. На пример, индиректно се мери средња брзина тела тако што се измере пређени пут и време за које га тело пређе, па се искористи одговарајућа формула. Индиректно се мери запремина коцке тако што се директним мерењима измере њене стране, па се запремина израчуна по одговарајућој формули.

Потпун запис резултата мерења, односно, бројне вредности физичке величине, поред измерене бројне вредности садржи и процењену апсолутну грешку мерења.

Апсолутна грешка Δx је процењена неизвесност у вредности физичке величине x, дата у апсолутном износу. Она се изражава истим јединицама као мерена величина.

Релативна грешка је:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{x}, \tag{1}$$

и често се изражава у процентима. Вредност x је најбоља процена тачне вредности физичке величине, или просто - вредност физичке величине. Резултат мерења обавезно садржи и апсолутну грешку и пише се најчешће у облику:

$$x \pm \Delta x\,. \tag{2}$$

Код директних мерења за најбољу процену тачне вредности најчешће се узима средња вредност резултата више поновљених мерења исте величине. Ако је извршено n мерења, при чему су измерене вредности $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тада је:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \tag{3}$$

Процена је боља ако се мерење понови више пута. Мерење треба понављати само ако то има смисла. Мерења се понављају тако да обухвате што више различитих резултата, према очекивању експериментатора. Код једноставнијих мерења се најчешће врши 3 до 5 мерења.

Пример: Дужину танке жице метарском траком има смисла мерити само једном, али пречник ваљка треба мерити више пута и то на различитим местима по висини, при цему ваљак треба заротирати сваки пут око осе.

Код индиректних мерења за најбољу процену тачне вредности узима се вредност добијена тако што се у формулу по којој се рачуна тражена величина уврсте најбоље процењене вредности величина из формуле.

Напомена: Резултати мерења се најчешће изражавају у облику као у формули (2), али понекада изражавају и у облику:

$$x(\Delta x)\,. \tag{4}$$

Овај начин приказивања резултата, користи се само у неким областима физике, за приказивање резултата мерења. Погодан је за приказ резултата са великим бројем сигурних цифара.

Пример

$$x = (1.4562 \pm 0.0004)\ \mathrm{nm} \qquad \text{или} \qquad x = 1.4562(4)\ \mathrm{nm}$$

Ако уз бројну вредност физичке величине није наведена грешка, подразумева се да она има исти ред величине као последња цифра наведена у бројној вредности.

Пример:

Ако је резултат мерења написан у облику $l = 934\ \mathrm{mm}$ значи да је апсолутна грешка мерења неколико милиметара (реда величине милиметра).

Ако је резултат мерења написан у облику $m = 2.32\ \mathrm{kg}$ или $m = 1.20\ \mathrm{kg}$ значи да је апсолутна грешка мерења неколико стотих делова (реда величине стотих делова) килограма.

Код неких физичких величина (гравитациона константа, убрзање Земљине теже и др.), као и код неких математичких величина (π, $\sqrt{2}$ и др.) поуздано је познато више цифара него што се користи при уобичајеним израчунавањима. У овом случају грешка коришћене бројне вредности је једнака половини реда величине последње цифре, као највећа грешка која може настати при заокруживању.

Пример: Убрзање Земљине теже на површини мора и на географској ширини 45° износи $g = 9.80665\ \mathrm{m/s^2}$. У задацима се оно обично даје заокружено на две децимале, као $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$, тј. са последњом цифром реда величине стотих делова. Највећа грешка коју можемо учинити коришћењем ове вредности, настала због заокруживања тачније вредности, износи $\Delta g = 0.005\ \mathrm{m/s^2}$.

Грубе грешке - превиди

У наведене грешке мерења не смеју бити укључене тако зване губе грешке или превиди, који настају услед несмотрености експериментатора или неуспravности мерних уређаја. Ове грешке се морају елиминисати, односно, ако се установи њихово постојање мерење или рачун се морају поновити.

У грубе грешке спадају, на пример, неисправно одређена вредност подеока на скали инструмента, погрешно записане јединице измерене величине, коришћење неодговарајућих формула, рачунске грешке и сл.

Случајне грешке

Случајне грешке су грешке које мењају знак и величину од једног до другог мерења. Ове грешке се одређују понављањем експеримента више пута под истим условима. Практично је неопходно увек извршити најмање три мерења свих директно мерених величина.

Ако се резултати тих мерења поклапају, мерење треба прекинути. Ако се резултати тих мерења разликују, неопходно је потражити узрок. Често мерни уређај није исправан; лоше учвршћен, електрични контакти лоши и сл. У том случају се уређај мора поправити и мерење поновити.

Ако није могуће одредити узроке разлике међу појединим резултатима мерења, мерења треба поновити више пута и записати све добијене резултате. Мерења треба поновити утилико више пута уколико је разлика међу овим резултатима већа, а ако она није велика (најчешћи случај), довољна су три мерења. О начину процене грешке оваквих мерења биће речи касније.

До случајних грешака могу довести непредвидиве варијације у еркспериментални условима, као што су температура, атмосферски притисак, влажност, потреси, варијације напона у мрежи и сл.

Узрок различитих резултата мерења може бити и у природи мерене величине. На пример, предмети нису савршено израђени, па се њихове димензије могу разликовати ако се мерење врши на више места. У природи неких случајних физичких величина је да се њихова бројна вредност разликује од мерења до мерења. Зато се број космичких честица које падају на мерни уређај (нпр. Гајгер-Милеров бројач) у једној минути знатно разликује од мерења до мерења (чак и за неколико десетина или стотина).

Систематске грешке

Систематске грешке имају исти знак при поновљеним мерењима, тј. дају увек већу, или мању вредност мерене величине од стварне. Оне су најчешће последица несавршености мерних уређаја.

Систематске грешке је често могуће открити или чак предвидети, па је могуће извршити одговарајућу корекцију резултата мерења.

Примери:

Због неједнакости крака теразија мерена маса ће бити већа или мања од стварне. Зато масу треба мерити два пута теразијама, тако да тегови и мерено тело замене положаје, а за измерену масу узети средњу вредност добијених резултата.

Због неодговарајуће величине подеока на скалама мерних уређаја, измерена бројна вредност ће бити већа или мања од стварне. На пример, дужина мерне траке зависи од температуре, па ако се мери дужина на температури различитој од температуре на којој су одређени подеоци, измерена дужина ће се разликовати од стварне. Међутим, ако се познаје коефицијент линеарног ширења материјала од кога је трака направљена и измери температура на којој је дужина мерена, може се одредити стварна вредност њених подеока.

Веома чест узрок систематске грешке је у неслагању ставарне нуле мерног инструмента са инструменталном нулом (означеном на инструменту). Због тога је потребно пре мерења одредити положај стварне нуле инструмента.

<u>Процена грешака директних мерења</u>

Апсолутна грешка директног мерења физичке величине не може бити мања од најмање вредности која се поуздано може измерити датим инструментом ($\Delta x_{\min}$) у конкретним условима мерења. Назваћемо је <u>апсолутна грешка инструмента</u>.

Апсолутна грешка мерног инструмента, или начин њеног одређивања, су најчешће означени на њему или у техничкој спецификацији. Навешћемо неколико таквих примера, због лакшег сналажења у разумевању ових ознака.

Пример 1

Апсолутна грешка мерног инструмента означена као вредност најмањег подеока на скали. Напомена: често се вредност најмањег подеока назива тачност инструмента, што није у складу са језичким смилом ове речи. По томе метарска трака, која има тачност 1 мм, у односу на нонијус тачности 0.01 мм има већу тачност, иако је јасно да мери са већом грешком, тј. мање тачно!

Пример 2 (Уобичајен код дигиталних мерних инструмената)

Апсолутна грешка мерног инструмента се рачуна по формули

$$\Delta x = kx + nx_{\min},$$

где је k дата класа тачности мерног инструмента x измерена вредност и $x_{\min}$ вредност последње цифре. n је најчешће један, и ако није наглашено другачије, тако га треба и узети.

Веома често је класа тачности инструмента различита за различите опсеге мерења исте физичке величине, као и за мерење различитих физичких величина мултиметрима.

Дисплеј веома осетљивих дигиталних мерних инструмента могу показивати више редова цифара које се мењају. Рецимо да се не мењају се цифре јединица, десетих и стотих делова, цифра хиљадитих делова се мења између две вредности, или се не мења, док се цифра десетохиљадитих делова мења веома брзо, а стохиљадитих делова тако брзо се мења да видимо само да то место трепери, и не препознајемо цифре. У том случају треба узети $x_{\min} = 0.001$ јединица мерене величине.

На пример, нека је мерен напон дигиталним универзалним мерним инструментом класе тачности $k = 0.01$ (1%). Ништа друго није у упутству наглашено. Измерен је напон 1.345 V. Очигледно је вредност последње цифре 0.001 V, па грешка мерења напона износи:

$$\Delta U = 0.01 \cdot 1.345\,\mathrm{V} + 0.001 = 0.01445,$$

а резултат се може написати у облику:

$$U = (1.34 \pm 0.02)\,\mathrm{V}.$$

Пример 4 (Уобичајен код аналогних мерних инструмената, као што су мултиметри старије генерације)

Апсолутна грешка мерног инструмента се рачуна по формули

$$\Delta x = k x_0 + \frac{x_{\min}}{10},$$

где је k дата класа тачности мерног инструмента, x_0 максимална вредност која се може измерити коришћеним инструментом (ако инструмент има више опсега, максимална вредност која се може измерити коришћеним опсегом), $x_{\min}$ вредност најмањег подеока скале инструмента.

На пример, нека је мерена струја универзалним мерним инструментом класе тачности $k = 0.02$ (2%). Измерена је струја 9.35 mA, при чему је коришћен опсег којим се може мерити струја до 20 mA чија одговарајућа скала инструмента има 50 подеока.

Очигледно је вредност најмањег подеока $10\,\mathrm{mA} : 100 = 0.1\,\mathrm{mA}$, па грешка мерења струје износи:

$$\Delta I = 0.02 \cdot 10\,\mathrm{mA} + 0.1\,\mathrm{mA} : 10 = 0.21\,\mathrm{mA},$$

а резултат се може написати у облику:

$$I = (9.4 \pm 0.3)\,\mathrm{mA}.$$

Ако апсолутна грешка мерног инструмента, или начин њеног одређивања, нису означени на њему или у техничкој спецификацији, код инструмената са скалом се у највећем броју случајева може узети да је она једнака <u>вредности најмањег подеока на скали инструмента</u>. Ако је величина најмањег подеока на скали велика (например подеок широк 2 - 3 мм) и положај на њој добро дефинисан (казаљка танка, са огледалом испод, и сл.) за најмању грешку директног мерења се може узети део тог подеока који се може поуздано одредити (према процени екпериментатора). Најчешће се узима да је једнака половини вредности тог подеока. Ако је положај на скали тешко одредити (на пример, ситни подеоци на манометру са живом која има закривљен мениskus) за минималну апсолутну грешку директног мерења може се узети и више од вредности једног подеока, према процени експериментатора.

Апсолутна грешка директних мерења је најчешће већа од поменуте апсолутне грешке мерног инструмента и може да се процени на више начина. Ако је извршен релативно велики број мерења, за процену се користе статистичке методе. Ако је број мерења мали, као код једноставнијих мерења, апсолутна грешка је једнака највећем одступању, по апсолутној вредности, појединачних резултата x_i од средње вредности x_s, односно, $|x_i - x_s|_{max}$, али не може бити мања од апсолутне грешке мерног инструмента.

Претпоставимо, у наредна три примера, да смо мерили дужину мерним инструментом чија је вредност најмањег подеока 0.01 mm, што смо проценили и апсолутну грешку мерног инструмента Δx_{min}. Изразимо правилно резултате мерења.

Пример 1:

$$x_1 = 5.26 \text{ мм} \qquad x_2 = 5.28 \text{ мм} \qquad x_3 = 5.31 \text{ мм}$$

$$x_s \approx 5.283 \text{ mm}, \quad |x_i - x_s|_{max} \approx 0.027 \text{ mm}, \quad \Delta x = |x_i - x_s|_{max} = 0.03 \text{ mm},$$

па је резултат мерења:

$$x = (5.28 \pm 0.03) \text{ mm}.$$

Пример 2:

$$x_1 = 5.26 \text{ мм} \qquad x_2 = 5.27 \text{ мм} \qquad x_3 = 5.26 \text{ мм}$$

$$x_s \approx 5.263 \text{ mm} \quad |x_i - x_s|_{max} = 0.003 \text{ mm} \quad \Delta x = \Delta x_{min} = 0.01 \text{ mm},$$

па је резултат мерења:

$$x = (5.26 \pm 0.01) \text{ mm}.$$

Пример 3:

$$x_1 = 5.26 \text{ мм} \qquad x_2 = 5.26 \text{ мм} \qquad x_3 = 5.26 \text{ мм}$$

$$x_c = 5.26\ \text{мм} \qquad |x_i - x_s|_{max} = 0 \qquad \Delta x = \Delta x_{min} = 0.01\ \text{mm}\ ,$$

па је резултат мерења:

$$x = (5.28 \pm 0.01)\ \text{mm}\ .$$

Процена грешака индиректних мерења

За најбољу процену тачне вредности индиректно мерене физичке величине узима се вредност која се добија уврштавањем у одговарајућу формулу вредности директно мерених величина.

Грешке индиректно мерених физичких величина процењују се различитим методама. Најчешће се користи метод диференцијалног рачуна. За разумевање овог принципа, потребно је знање математике које превазилази знања ученика основних и средњих школа. У табели су приказана најважнија правила за процену грешака индиректно мерених величина овом методом.

Табела 1. Преглед правила за процену грешака индиректних мерења методом диференцијалног рачуна

Број	Формула	Апсолутна грешка	Релативна грешка
1	$y = \text{const} \cdot x_1$	$\Delta y = \text{const} \cdot \Delta x_1$	$\delta_y = \delta_{x_1}$
2	$y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ $y = x_1 - x_2 - \ldots - x_n$	$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n$	$\delta_y = \dfrac{\Delta y}{y}$
3	$y = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ $y = \dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k}{x_{k+1} \cdot \ldots \cdot x_n}$	$\Delta y = y\delta_y$	$\delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \ldots + \delta_{x_n}$
4	$y = x_1^p$	$\Delta y = y\delta_y$	$\delta_y = p\delta_{x_1}$
5	$y = \sqrt[p]{x_1}$	$\Delta y = y\delta_y$	$\delta_y = \dfrac{1}{p}\delta_{x_1}$

Претпоставимо да су, директно или индиректно, измерене физичке величине $x_1, x_2, \ldots, x_n$, да су њихове апсолутне грешке $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, а релативне грешке $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_n}$. У табели 1 су дате апсолутне и релативне грешке индиректно мерене физичке величине *й*, која је неком формулом, датом у првој колони, повезана са овим физичким величинама.

Претпоставимо у свим наредним примерима да су мерене физичке врличине (директно или индиректно) *x,* y и *z*, и одређене њихове бројне вредности са одговарајућим грешкама Δx, Δy и Δz. на пример, нека је:

$$x = (7.5 \pm 0.1)\ \mathrm{s}\ , \quad y = (0.045 \pm 0.002)\ \mathrm{m}\ , \quad z = (54{,}0 \pm 0.5)\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\ .$$

Одредимо изразе за грешке индиректно мерене величине *f*, ако се она из ових величина може одредити коришћењем одређене формуле.

Пример 1

Нека је индиректно мерена величина дата формулом:

$$f = \frac{2x}{y}\ .$$

Пошто је индиректно мерена величина дата у облику количника, применићемо правило за количник грешака (колона 2 у табели 1):

$$\delta_f = \delta_{2x} + \delta_y\ .$$

Први сабирак представља грешку константом помножене величине, па је према колони 1 у табели 1:

$$\delta_{2x} = \delta_x\ ,$$

па је:

$$\delta_f = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\ ,$$

односно:

$$\Delta f = f\delta_f = \frac{2x}{y}\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right) = \frac{2 \cdot 7.5\ \mathrm{s}}{0.045\ \mathrm{m}}\left(\frac{0.1}{7.5} + \frac{0.002}{0.045}\right) \approx 19.3\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\ .$$

Пошто је:

$$f = \frac{2x}{y} = \frac{2 \cdot 7.5\ \mathrm{s}}{0.045\ \mathrm{m}} \approx 333.3\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\ ,$$

па резултат треба написати у облику:

$$f = (330 \pm 20)\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\ .$$

Пример 2

Нека је индиректно мерена величина дата формулом:

$$f = 3x + \pi yz\ ,$$

где је p Лудолфов број.

Пошто се формула састоји од два сабирка применићемо правило за збир грешака (колона 2 у табели 1):

$$\Delta f = \Delta(3x) + \Delta(\pi yz) .$$

Први сабирак је грешка производа константе и мерене велићине, па је према колони 1 у табели 1:

$$\Delta(3x) = 3\Delta x ,$$

док је други сабирак производ три величине, па је према колони 3 у табели 1:

$$\delta_{\pi yz} = \delta_\pi + \delta_y + \delta_z = \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} ,$$

односно:

$$\Delta(\pi yz) = \pi yz\delta_{\pi yz} = \pi yz\left(\frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}\right).$$

Пошто је очигледно грешка величине y скоро 4%, грешка Лудолфовог броја је занемарива. Наиме, ако га знамо до друге децимале као $\pi = 3.14$, тада је $\Delta\pi = 0.005$, мање од 0.2%. Коначно, грешка индиректно мерене величине f износи:

$$\Delta f = 3\Delta x + \pi yz\left(\frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}\right) = 3\cdot 0.1\,\mathrm{s} + 3.14\cdot 0.045\,\mathrm{m}\cdot 54\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\left(\frac{0.002}{0.045} + \frac{0.5}{54}\right) \approx 0.71\,\mathrm{s} ,$$

а пошто је:

$$f = 3\cdot 7.5\,\mathrm{s} + 3.14\cdot 0.045\,\mathrm{m}\cdot 54\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}} \approx 30.13\,\mathrm{s} ,$$

то се резултат може написати у облику:

$$f = (30.1 \pm 0.7)\,\mathrm{s} \qquad \text{или} \qquad f = (30.1 \pm 0.8)\,\mathrm{s}$$

Пример 3

Нека је индиректно мерена величина дата формулом:

$$f = \sqrt{\frac{z}{x^3 y}} .$$

Пошто је тражена величина дата кореним изразом, применићемо правило у колони 5 табеле 1, па је

$$\delta_f = \frac{1}{2}\delta_{\frac{z}{x^3 y}} .$$

Релативну грешку поткореног израза, тражимо као гршку производа и количника. Према колони 3 табеле 1, она износи

$$\delta_{\frac{z}{x^3 y}} = \delta_z + \delta_{x^3} + \delta_y ,$$

где је други сабирак, као релативна грешка трећег степена, према колони 4 табеле 1

$$\delta_{x^3} = 3\delta_x$$

па је:

$$\delta_f = \frac{1}{2}(\delta_z + 3\delta_x + \delta_y)\,.$$

Апсолутна грешка тражене величине износи:

$$\Delta f = f\delta_f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{x^3 y}}\,(\delta_z + 3\delta_x + \delta_y)$$

$$\Delta f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{x^3 y}}\left(\frac{\Delta z}{z} + 3\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{54\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}}{(7.5\ \mathrm{s})^3 0.045\ \mathrm{m}}}\left(\frac{0.5}{54} + 3\frac{0.1}{7.5} + \frac{0.002}{0.045}\right) \approx 0.079\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Пошто је

$$f = \sqrt{\frac{z}{x^3 y}} = \sqrt{\frac{54\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}}{(7.5\ \mathrm{s})^3 0.045\ \mathrm{m}}} \approx 1.687\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

то се резултат може написати у облику:

$$f = (1.69 \pm 0.08)\ \frac{1}{\mathrm{s}}\,.$$